Τετάρτη 10 Μαΐου 2017

Λογισμός μεταβολών

Ζητάμε να βρούμε την $\psi = \psi(x)$ τέτοια ώστε

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \psi(x), \psi'(x))\, dx$$

x: ανεξάρτητη μεταβλητή

$\psi(x), \psi'(x)$: πρώτης τάξης παράγωγος.

να είναι ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο)

Γράφουμε την $\psi = \psi(a, x)$, της $\psi(0, x) = \psi(x)$, οπότε η J ελαχιστοποιείται όταν $a = 0$.

Ορίζουμε μια συνάρτηση $n(x)$ τέτοια ώστε $\psi(a, x) = \psi(x) + a \cdot n(x)$

Επίσης: $\left.\begin{cases} \psi(a, x_1) = \psi(x_1) \\ \psi(a, x_2) = \psi(x_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow n(x_1) = n(x_2) = 0$

Τελικά $J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f(\psi(a, x), \psi'(a, x), x)\, dx$

Τότε το ακρότατο θα δίνεται από:

$\left.\dfrac{\partial J}{\partial a}\right|_{a>0} = 0$, αναγκαία συνθήκη

Οι εξισώσεις Euler

Έστω ότι το: $J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f(\psi(a,x), \psi'(a,x), x)\, dx$

Τότε $\dfrac{\partial J}{\partial a} = \dfrac{\partial}{\partial a} \int_{x_1}^{x_2} f(\psi, \psi', x)\, dx$ και τότε

$\psi(a, x) = \psi(0, x) + a \cdot n(x)$

άρα $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi'} \cdot \dfrac{\partial \psi'}{\partial a}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial a} = n(x) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \psi} + n'(x) \dfrac{\partial f}{\partial \psi'}$, (1)

Δηλ. $\dfrac{\partial J}{\partial a} = \dfrac{\partial}{\partial a} \int_{x_1}^{x_2} f\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \dfrac{\partial f}{\partial a}(\psi, \psi', x)\, dx =$ $\longrightarrow$

$$\overset{①}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left(n(x) \frac{\partial f}{\partial \psi} + n'(x) \frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) dx$$

Για τον δεύτερο όρο:

$$\int_{x_1}^{x_2} n'(x) \frac{\partial f}{\partial \psi'} \, dx = \underbrace{\cancel{n(x) \frac{\partial f}{\partial \psi'} \Big|_{x_1}^{x_2}}}_{0} \to 0 - \int_{x_1}^{x_2} n(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) dx$$

$$n(x_2) \frac{\partial f}{\partial \psi'} \Big|_{x_2} - n(x_1) \frac{\partial f}{\partial \psi'} \Big|_{x_1}$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} n(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) dx$$

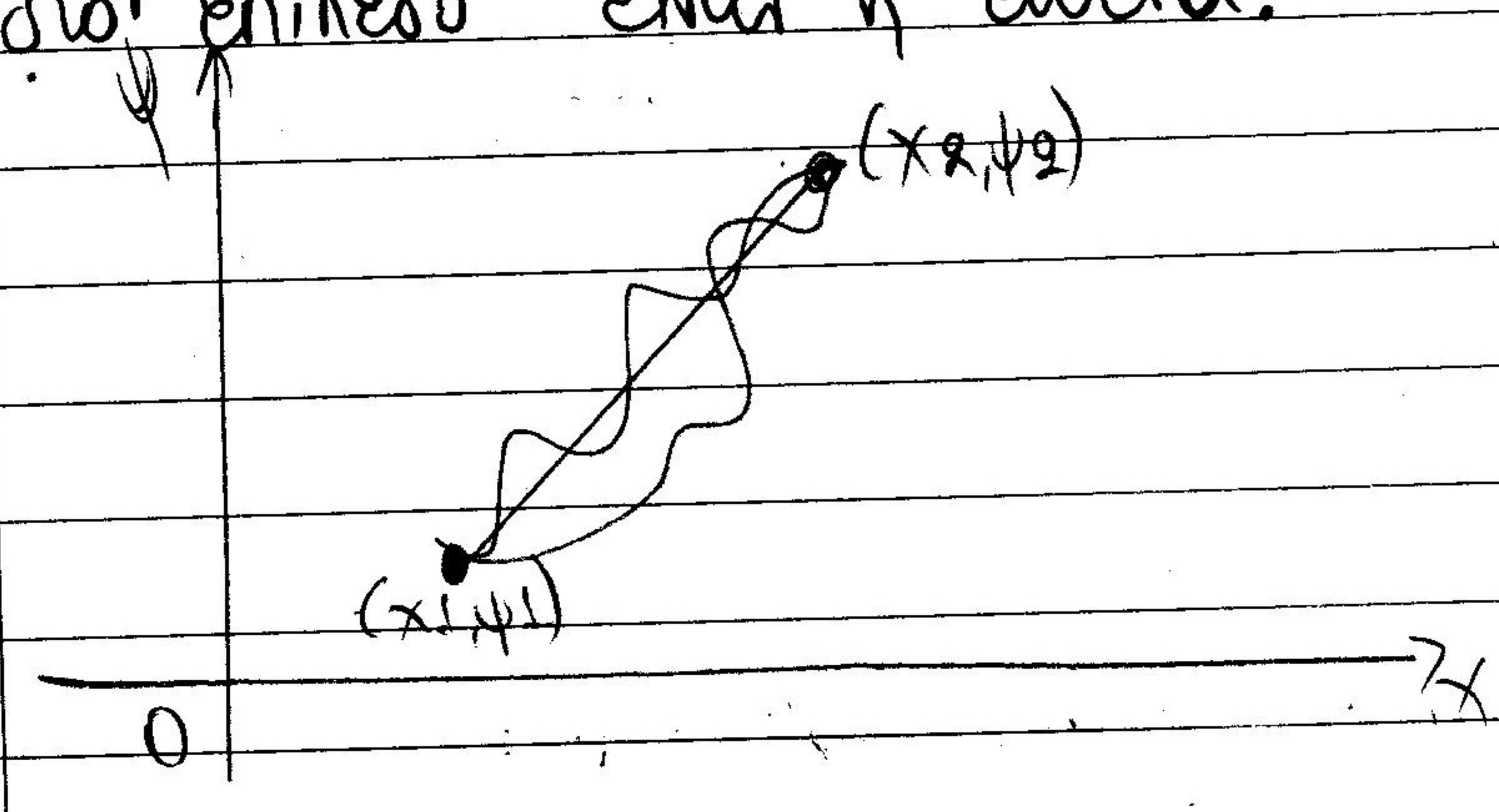
Οπότε τελικά έχουμε ότι:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[n(x) \frac{\partial f}{\partial \psi} - n(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} n(x) \left[\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \right] dx = 0, \ \forall n(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) = 0}$$ Εξίσωση Euler

Παράδειγμα: Η συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο είναι η ευθεία.



$$S=\int_{(x_1,\psi_1)}^{(x_2,\psi_2)}\sqrt{dx^2+d\psi^2}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}\,dx \qquad S:\bar r(t)$$

επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $f(\psi(x),\psi'(x),x)$ $\quad$ S: εκφράζω το $\psi=\psi(x)$

με $f=\sqrt{1+(\psi')^2}$ η εξίσωση Euler $\quad$ ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial\psi}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial\psi'}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial\psi'}=c\Rightarrow\frac{2\psi'}{2\sqrt{1+(\psi')^2}}=c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi'=\frac{c^2}{1-c^2}=\tilde c$$

Ολοκληρώνοντας, παραμετρική οικογένεια ευθειών $\psi=ax+\beta$.

Η δεύτερη μορφή της εξίσωσης Euler

Γνωρίζουμε ότι $f=f(\overset{\psi(a,x)}{\psi},\psi',x)$

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\psi'}\frac{\partial\psi'}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\;\psi'(a,x)\quad=\psi'\frac{\partial f}{\partial\psi}+\psi''\frac{\partial f}{\partial\psi'}+\frac{\partial f}{\partial x}\quad(1)$$

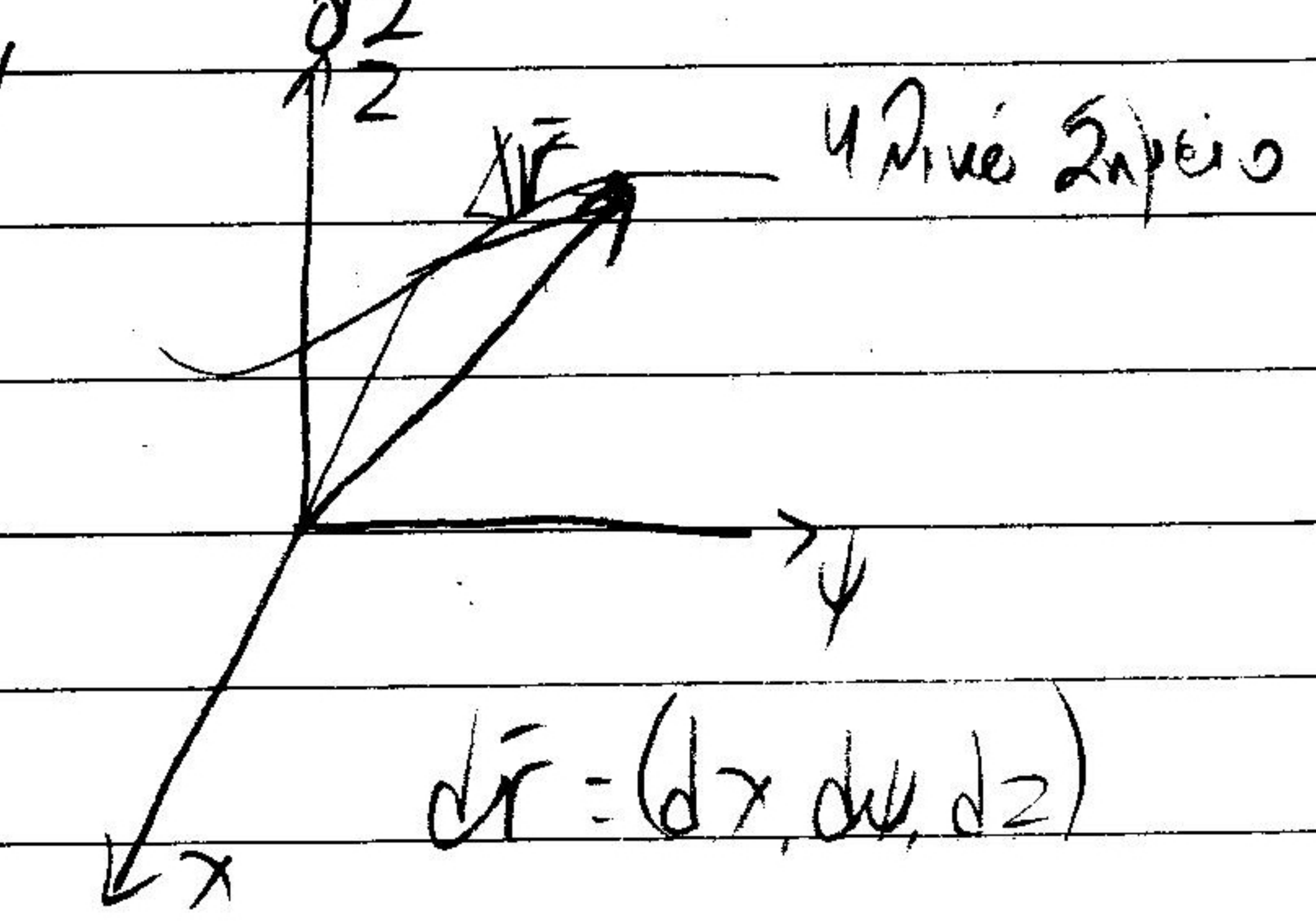
Ολικό διαφορικό μιας βαθμωτής $f(x,\psi,z)$

$f:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ (παράδειγμα με τη θερμοκρασία)

~~df~~ πρέπει η f να είναι διαφορίσιμη: υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f, f_x, f_ψ, f_z είναι συνεχείς συναρτήσεις στο D

Τότε ορίζουμε την $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial\psi}d\psi+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$

$=\underset{\text{βάθμωση}}{\text{grad}}\,f\cdot d\bar r=\bar\nabla f\cdot d\bar r$



$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot x}+\frac{\partial f}{\partial\psi}\underbrace{\frac{d\psi}{dt}}_{\dot\psi}$$

Επίσης: $\frac{d}{dx}\left(\psi'\frac{\partial f}{\partial\psi'}\right)=\psi''\frac{\partial f}{\partial\psi'}+\psi'\frac{d}{dx}\left(\cancel{\psi'}\frac{\partial f}{\partial\psi'}\right)\Rightarrow$

→

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\psi' \frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) = \frac{df}{dx} - \psi' \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial f}{\partial x} + \psi' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\psi' \frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - \psi' \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right)\right]}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\psi' \frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - \psi' \frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) = 0}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Χρησιμοποιείται σε αντικατάσταση της προηγούμενης αν:

(1) η f εξαρτάται άμεσα από το x.

(2) αν $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές

$f = f(\psi_1(x), \psi_1'(x), \psi_2(x), \psi_2'(x), \dots, x)$ ή

$f = f(\psi_i(x), \psi_i'(x), x)$, $i = 1,2,3,\dots,n$

Βρίσκαμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial \psi_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi_i'} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$

Ζητάω να εντοπίσω τις $\psi_i = \psi_i(x)$

Εξισώσεις Euler με περιορισμό (συνθήκη)

Ζητάμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω στην επιφάνεια

Τότε όλα τα σημεία της διαδρομής πρέπει να ικανοποιούν και την εξίσωση της επιφάνειας.

Δηλαδή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε μια ποσότητα που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. $\rightarrow$

Έστω η $f = f(\psi, \psi', z, z', x)$, δηλαδή μια συνάρτηση 2 μεταβλητών
και τη συνθήκη $g(\psi, z, x) = 0$
Η συνάρτηση Lagrange θα γράφεται ως:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right)\frac{\partial \psi}{\partial a} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{\partial z}{\partial a}\right] dx$$

Παρατήρηση: Οι παράγωγοι $\frac{\partial \psi}{\partial a}$ και $\frac{\partial z}{\partial a}$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις για τις δυο μεταβλητές. Αντίθετα συνδέονται μέσω της σχέσης: $g(\psi, z, x) = 0$

Όμως: $\frac{dg}{da} = \frac{\partial g}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} = 0$

Προσοχή: $\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} = 0$ γιατί $\frac{\partial x}{\partial a} = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial a}$$

Επίσης: $\psi(x,a) = \psi(x) + a \cdot n_1(x)$
$z(x,a) = z(x) + a\, n_2(x)$
άρα $\frac{dg}{da} = \frac{\partial g}{\partial \psi} n_1(x) + \frac{\partial g}{\partial z} n_2(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n_2(x) = - n_1(x) \frac{\partial g/\partial \psi}{\partial g/\partial z}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right) n_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right) n_1 \frac{\partial g/\partial \psi}{\partial g/\partial z}\right] dx$$

Δηλαδή $\left.\frac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0} = 0$, $\forall\, n_1(x)$, δηλαδή πρέπει:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial \psi} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\frac{1}{\partial g/\partial z}$$

Τι έχουμε πετύχει με αυτή την έκφραση;
Έχουμε διαχωρίσει πλήρως τις μεταβλητές ψ και z.

$\longrightarrow$

Όμως όλα είναι συνάρτηση του x, δηλαδή η ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \psi} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial \psi'}\right)\dfrac{1}{\partial g/\partial \psi} = \lambda(x) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial z'}\right)\dfrac{1}{\partial g/\partial z} = \lambda(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \psi} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial \psi'} = \lambda(x)\, \partial g/\partial \psi \quad (1) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial z'} = \lambda(x)\, \partial g/\partial z \quad (2) \end{cases}$$

Ζητώ να επιλύσω τις $\psi=\psi(x)$, $z=z(x)$, $\lambda=\lambda(x)$, πολλαπλασιαστής Lagrange.

επίσης $g(\psi, z, x) = 0$ (3)

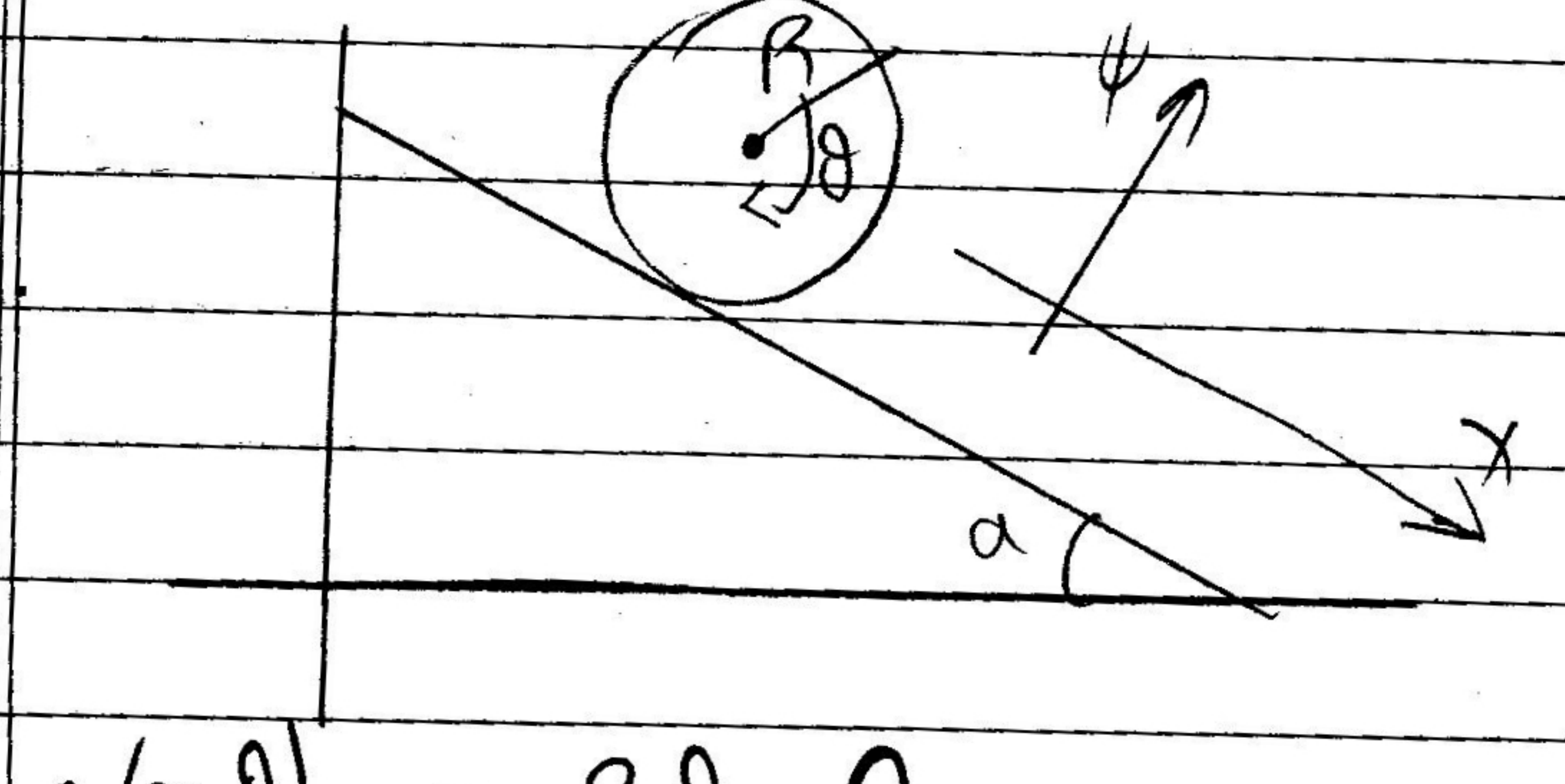
Παρατήρηση: Στη γενική περίπτωση που έχουμε παραπάνω από 2 μεταβλητές δηλαδή $f=f(\psi_i, x)$, $i=1,2,\dots,n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \psi_i} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial \psi_i'} + \sum_j \lambda_j(x)\cdot\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m \\[2ex] g_j(\psi_i, x) = 0 \end{cases}$$

$$f(\psi, z, w, x) \qquad \begin{matrix} g_1(\psi, z, w, x) \\ g_2(\psi, z, w, x) \end{matrix}$$

Παράδειγμα: Έστω κυλινδρικός δίσκος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Βρείτε τη συνάρτηση περιορισμού.

Απάντηση:



Η απόσταση x που διανύει ο κυλινδρικός δίσκος: $x = R\cdot\theta$ και αυτή είναι η συνθήκη περιορισμού,

$$g(x,\theta) = x - R\theta = 0$$